

# EXERCICES

## Nombres premiers

### Exercice 1

- Voici des sommes de trois entiers impairs consécutifs. Calculer chaque somme et dire s'il s'agit d'un nombre premier.
  - $3 + 5 + 7$
  - $11 + 13 + 15$
  - $137 + 139 + 141$
- Tout entier impair est de la forme  $2n + 1$  avec  $n$  un entier naturel.
  - Exprimer en fonction de  $n$  la somme  $S$  de ces trois entiers impairs consécutifs.
  - En déduire que la somme  $S$  n'est jamais un nombre premier.

### Exercice 2

- Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $n$  qui divisent  $n + 1$ .
- Déterminer l'ensemble des entiers relatifs  $n$  tels que  $3n + 4$  divise  $n + 6$ .
  - En déduire l'ensemble des entiers relatifs  $n$  tel que  $\frac{n + 6}{3n + 4}$  est un entier naturel.
- Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tel que  $\frac{4n + 11}{n + 1}$  soit un nombre premier.

### Exercice 3

D'après un exercice du BAC 1982

- Soient  $x$  et  $p$  deux entiers naturels. Calculer la somme  $S_p = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^p x^p$ .
- Montrer que quels que soient les entiers naturels  $x$  et  $n$ ,  $x^{2n+1} + 1$  est divisible par  $x + 1$ .
- En déduire que quels que soient les entiers naturels  $p$  et  $k$ , si  $k$  est impair, alors  $(2^{2p})^k + 1$  est divisible par  $2^{2p} + 1$ .
- Soit  $m$  un entier naturel non nul. Montrer que si  $2^m + 1$  est premier alors  $m$  est une puissance de 2.